# 关于不等式$\sum \frac{1}{x_j^i} \geq \sum x_j^i$（$\sum x_j = n$）的推广与加强


参赛队员：徐子卿

指导老师：戴中元

参赛学校：华东师范大学第二附属中学

省　　份：上海市

# 目　　录

摘要：........................................................................................ 1

一、原不等式........................................................................................ 3

二、不等式的推广（未知数）.................................................................3

三、 不等式的推广（次数）...................................................................9

四、 不等式的推广（形式）.................................................................13

五、 不等式的推广（参数）.................................................................16

六、 不等式的猜想................................................................................16

七、 参考文献........................................................................................16

# 关于不等式$\sum\frac{1}{x_j^i}\geq\sum x_j^i$（$\sum x_j=n$）的推广与加强

**摘要：**

本文借助计算机软件 Free GraCalc，对$\sum\frac{1}{x_j^i}\geq\sum x_j^i$（$\sum x_j=n$）不等式在不同次数、不同元数的情况下进行了一系列的推广与加强，并引入了一系列参数；同时对其次数、元数进行了一般化的处理，得到了一些结论，这些结论在高次不等式证明、函数求极值的问题上会有一定的应用。

**创新之处：对于$\sum\frac{1}{x_j^i}\geq\sum x_j^i$（$\sum x_j=n$）不等式进行了推广，将该不等式的形式推广到多元高次的情况下，并得到了该不等式在一般形式下的成立范围。通过对该不等式的观察，笔者提出与其形式相似的不等式。**

**闪光之处：笔者推广后的结论可以应用在证明高次不等式以及求值域上。**

# The Enhancement, Extension and Analogue of The Inequality $\sum \frac{1}{x_j^i} \geq \sum x_j^i$ （$\sum x_j = n$）

This paper presents the generalization, enhancement and analogy of the inequality $\sum \frac{1}{x_j^i} \geq \sum x_j^i$ （$\sum x_j = n$）based on an computer software called Free GraCalc. It draws conclusions on different conditions of exponent and number of elements. We also introduce parameters to the inequality and generalize the exponential properties of the inequality.

The conclusions can be applied to problems involving higher-order inequalities and functions or finding extreme values of functions.

Keywords: Inequality, generalization, analogy, derivation, mathematics software

# 关于不等式$\sum\frac{1}{x_j^i}\geq\sum x_j^i$（$\sum x_j=n$）的推广与加强

## 一、原不等式

已知$a+b=2,a,b>0$，则$a^2+b^2\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

证：原不等式为 $a^2+b^2\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,

两边同时乘$a^2b^2$得：

$a^2+b^2\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow ab\leq 1$，再加上：$a+b=2$，显然成立.

## 二、不等式的推广（未知数）

**原不等式的已知条件是$n$个数的和为$n$，下面证明该命题额加强形式：已知条件为$n$个数的和小于等于$n$.**

1.1 已知$a+b+c\leq 3,a,b,c>0$，则$a^2+b^2+c^2\leq\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

证：不妨设$a\geq b\geq c$，则$b+c\leq 2$,

令$f(a,b,c)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2$,

首先，对于两个正实数$b,c$，当$b+c$为定值且小于等于 2 时：

$\because bc\leq\frac{(b+c)^2}{4}=1\therefore\frac{1}{b^2c^2}-1\geq 0$,

$\therefore\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-b^2-c^2=\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b^2c^2}-1\right)\geq\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2\left[\frac{16}{\left(b+c\right)^4}-1\right]$,

当且仅当$b=c$时等号取到.

$\therefore f(a,b,c)\geq\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}-\left(\frac{3-a}{2}\right)^2-\left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ,

下面证明：

$g(a)=\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}-\left(\frac{3-a}{2}\right)^2-\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\geq 0$,

$g(a)'=\frac{16}{(3-a)^3}+3-3a-\frac{2}{a^3}$,

$g(a)''=\frac{6}{a^4}+\frac{48}{(3-a)^4}-3$,

先证明当$0<a<3$时，$g(a)''\geq 0$,

显然$\frac{6}{a^4},\frac{48}{(3-a)^4}$均大于 0,

且$1\leq a<3$时$\frac{48}{(3-a)^4}\geq\frac{48}{(3-1)^4}\geq 3$，$0<a<1$时，$\frac{6}{a^4}\geq 6$,

$\therefore$结论成立.

由上述结论可知$g(a)'$单调递增

$\because g(1)=0\therefore g(a)'\geq 0$,

$\therefore g(a)_{\min}=g(1)=0\therefore g(a)\geq 0$,

综上所述：得证

2.已知$a+b+c+d\leq 4$，则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\geq a^2+b^2+c^2+d^2$.

证：不妨设$a\geq b\geq c\geq d$,

$\because\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2ab\geq 4$,

$\therefore$只需证明$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\geq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-4=(a+b)^2+c^2+d^2-4$,

记$A=\frac{c+d}{2}\therefore A\leq 1$,

记$f(c,d)=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-(4-2A)^2-c^2-d^2+4$,

$\therefore f(A,A)=\frac{2}{A^2}-(4-2A)^2-2A^2+4$,

$\therefore f(c,d)-f(A,A)=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-\frac{2}{A^2}-(c^2+d^2-2A^2)$

化简得：

$$f(c,d)-f(A,A)=\frac{(c-d)^2}{2c^2d^2(c+d)^2}\left[2c^2+2d^2+8cd-c^2d^2(c+d)^2\right]\ge\frac{(c-d)^2}{2c^2d^2(c+d)^2}(c+d)^2(2-c^2d^2)\ge 0,$$

又$\because f(c,d)\ge f(A,A)=\frac{2}{A^2}-(4-2A)^2-2A^2+4=-\frac{(A-1)^3(3A+1)}{A^2}\ge 0$,

$\therefore$可以证明得：

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$,

3.已知$a+b+c+d+e\le 5$，则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}\ge a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$,

证：不妨设$a\ge b\ge c\ge d\ge e$，则有$b+c+d+e\le 4$,

设$k=a+b+c+d+e$,

令$f(a,b,c,d,e)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}-a^2-b^2-c^2-d^2-e^2$,

由 2 的证明不难看出，当$b+c+d+e$为定值且小于等于 4 时,

$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}-b^2-c^2-d^2-e^2$的最小值当且仅当$b=c=d=e$时取到,

令$g(a,b)=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}-a^2-4b^2$,

$\therefore f(a,b,c,d,e)\ge g(a,b)$,

又$b\le\frac{k-a}{4}$ $\therefore g(a,b)\ge g(a,\frac{k-a}{4})=\frac{1}{a^2}+\frac{64}{(k-a)^2}-a^2-\frac{(k-a)^2}{4}$,

令$h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{64}{(k-a)^2}-a^2-\frac{(k-a)^2}{4}$,

当$k=5$时,

$$h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{64}{(5-a)^2}-a^2-\frac{(5-a)^2}{4}=\frac{-5(a-1)^2}{4a^2(5-a)^2}(a^4-10a^3+29a^2-32a-20),$$

令$m(a)=a^4-10a^3+29a^2-32a-20$,

$m(a)'=4a^3-30a^2+58a-32$,

$m(a)' = 0$时，解得$x_1 = 1, x_2 = \frac{13-\sqrt{41}}{4}, x_3 = \frac{13+\sqrt{41}}{4}$，

$\therefore a \in \left[1, \frac{13-\sqrt{41}}{4}\right]$时，$f(a)$单调递增,

$a \in \left[\frac{13-\sqrt{41}}{4}, \frac{13+\sqrt{41}}{4}\right]$时，$f(a)$单调递减,

$a \in \left[\frac{13+\sqrt{41}}{4}, 5\right]$时，$f(a)$单调递增,

而$m(\frac{13-\sqrt{41}}{4}) \approx -9.16 < 0, m(1) = -32 > 0$，

故$m(a)$在$1 \le a < 5$时小于 0，$\therefore h(a) \ge 0$，等号当且仅当$a = 1$时取到,

当$k \ne 5$时，令$x_1 = \frac{5a}{k}, x_2 = \frac{5b}{k}, x_3 = \frac{5c}{k}, x_4 = \frac{5d}{k}, x_5 = \frac{5e}{k}$，

则$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$，

$$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2} \ge a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \Leftrightarrow \frac{25}{k^2}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}\right) \ge \frac{k^2}{25}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)$$

$\because k < 5 \therefore \frac{625}{k^4} > 1$,

$$\therefore \frac{625}{k^4}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}\right) - \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)$$

$$= \frac{625-k^4}{k^4}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}\right) + \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2} - \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)$$

$$\ge \frac{625-k^4}{k^4}\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}\right),$$

$$\ge \frac{625-k^4}{5k^4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\frac{1}{\sqrt{x_4}}+\frac{1}{\sqrt{x_5}}\right)^2,$$

设$m(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$，则$m''(x) = \frac{3}{4}x^{-2.5} > 0$，

由 Jensen 不等式：$\frac{m(x_1)+m(x_2)+m(x_3)+m(x_4)+m(x_5)}{5} \ge m\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\right)$，

$$\therefore \frac{625-k^4}{5k^4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\frac{1}{\sqrt{x_4}}+\frac{1}{\sqrt{x_5}}\right)^2 \geq \frac{625-k^4}{k^4},$$

$\therefore k<5$ 上式显然成立，且等号条件为 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ 即 $a=b=c=d=e$.

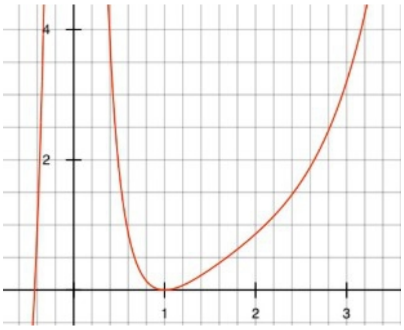
**n=6,7,8 时，证明过程与 n=5 相同，在此不详细说明.**

**由上述说明可以发现当** $x_1+\ldots x_n=n$ **时不等式成立，则** $x_1+\ldots x_n<n$ **时，不等式也肯定成立.**

**下面附上 n=6,7,8 时，h(a)的函数图像.**

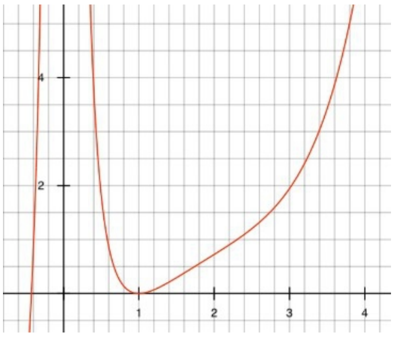
**n=6，** $h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{125}{(6-a)^2}-a^2-\frac{(6-a)^2}{5}$**,**

且 $h(1)=0$**,**



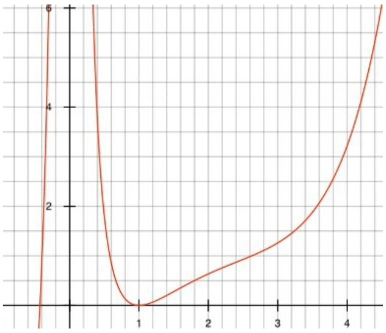

**n=7,** $h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{216}{(7-a)^2}-a^2-\frac{(7-a)^2}{6}$**,**

且 $h(1)=0$**,**



**n=8,** $h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{343}{(8-a)^2}-a^2-\frac{(8-a)^2}{7}$**,**

且 $h(1)=0$**,**




4.已知 $a+b+c+d+e+f+g+h+i=9$ 则：

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{i^2},$$

$$h(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{512}{(9-a)^2}-a^2-\frac{(a-9)^2}{8},$$

$$h(a)=\frac{1}{8a^2(9-a)^2}\left[-9(a-1)^2(a^4-18a^3+89a^2-128a-72)\right],$$

即考虑 $f(a)=a^4-18a^3+89a^2-128a-72$ 在 $1\le a<9$ 的正负性,

$$f'(a)=2(a-1)(2a^2-25a+64)=0\Rightarrow a=1,\frac{25\pm\sqrt{113}}{4},$$

$\therefore a\in\left[1,\frac{25-\sqrt{113}}{4}\right]$ 时， $f(a)$ 单调递增,

$a\in\left[\frac{25-\sqrt{113}}{4},\frac{25+\sqrt{113}}{4}\right]$ 时， $f(a)$ 单调递减,

$a\in\left[\frac{25+\sqrt{113}}{4},9\right]$ 时， $f(a)$ 单调递增,

而 $f(\frac{25-\sqrt{113}}{4})\approx -51.2<0, f(9)=-576<0$,

故 $f(a)$ 在 $1\le a<9$ 时小于 0，$\therefore h(a)\ge 0$，等号当且仅当 $a=1$ 时取到,

综上所述：得证.

4.下面说明：若 $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=10$ 则

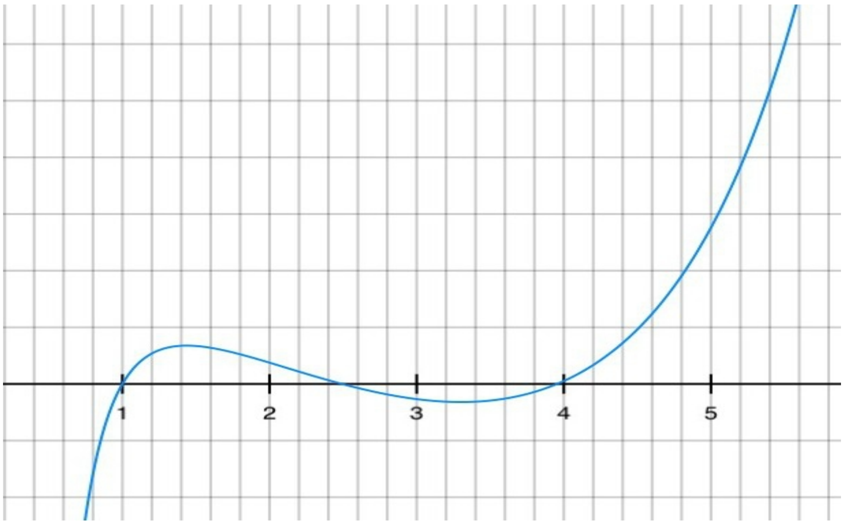
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2+j^2\le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{j^2}$$

不成立,

$$h(a)=\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{729}{(a-10)^2}-\frac{(a-10)^2}{9},$$

$$h(a)'=\frac{1458}{(10-a)^3}-\frac{2}{a^3}-\frac{20}{9}a+\frac{20}{9},$$

下图为 $h(a)'$ 的图像,




当 a=5,b=3 其余全等于 0.25 时取到反例,

下面说明当元数大于 10 时，该类型不等式均不成立,

取 $x_1=5, x_2=2, x_3=x_4=...=x_{10}=0.25, x_{11}=x_{12}=...x_n=1$，则 $\sum x_i=n$,

而 $\sum\frac{1}{x_i^2}\ge\sum x_i^2$，$\therefore$ 得证.

# 三、不等式的推广（次数）

**该部分证明方法和 2.3 相同，所以不详细叙述。对于每一个 $h(a)$ 会附上其相应的函数图，来证明其正确性.**

1.已知 $a+b\le 2$，则 $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\ge a^n+b^n$.

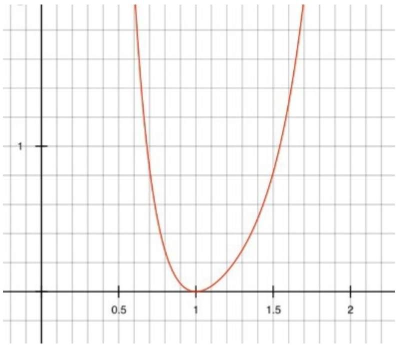
$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}-(a^n+b^n)=\frac{(a^n+b^n)(1-a^nb^n)}{a^nb^n}$,

$\because a+b\le 2\ \therefore ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=1$,

$\therefore \frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}-(a^n+b^n)=\frac{(a^n+b^n)(1-a^nb^n)}{a^nb^n}\ge 0$ 等号当且仅当 $a=b=1$ 时取到.

2.已知 $a+b+c\le 3$，则 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge a^3+b^3+c^3$.

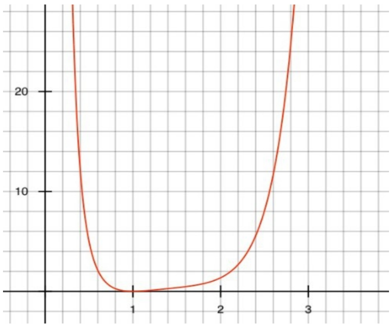
$h(a)=\frac{1}{a^3}-a^3+\frac{16}{(3-a)^3}-\frac{(3-a)^3}{4}$ 且 $h(1)=0$， $h(a)$ 图像如下：




$\therefore$ 得证.

3.已知 $a+b+c+d\le 4$，则 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge a^3+b^3+c^3+d^3$.

$h(a)=\frac{1}{a^3}-a^3+\frac{81}{(4-a)^3}-\frac{(4-a)^3}{9}$，且 $h(1)=0$. $h(a)$ 图像如下：




$\therefore$得证.

而推广到五元及以上时，取 $x_1=2, x_2=x_3=x_4=x_5=0.75, x_6=x_7=...x_n=1$,

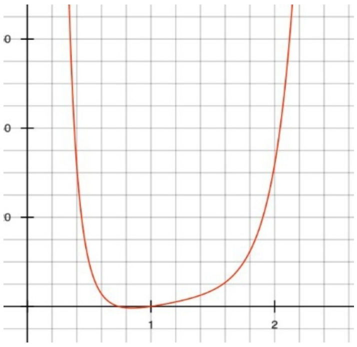
此时有 $x_1+x_2+...x_n=n$,

且 $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+...+\frac{1}{x_n^3} \geq x_1^3+x_2^3+...+x_n^3$,

$\therefore n \geq 5$ 时，$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+...+\frac{1}{x_n^3} \geq x_1^3+x_2^3+...+x_n^3$ 不成立.

4.已知 $a+b+c \leq 3$，则 $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4} \geq a^4+b^4+c^4$.

$h(a)' = -\frac{4}{a^5}-4a^3+\frac{2^7}{(3-a)^5}+\frac{(3-a)^3}{2}$，且 $h(1)=0$ . $h(a)$ 图像如下：




$\therefore$得证.

而推广到四元及以上时，取 $x_1=2, x_2=x_3=x_4=\frac{2}{3}, x_5=x_6=\ldots x_n=1$，

此时有 $x_1+x_2+\ldots x_n=n$，

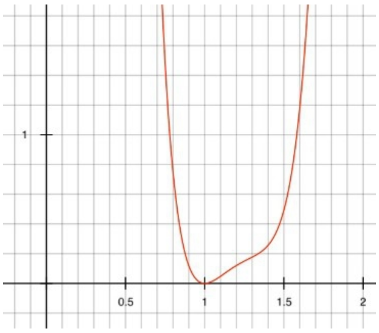
且 $\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}+\ldots+\frac{1}{x_n^4}\geq x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4$，

$\therefore n\geq 4$ 时，$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}+\ldots+\frac{1}{x_n^4}\geq x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4$ 不成立.

5.已知 $a+b+c\leq 3$，则 $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}\geq a^5+b^5+c^5$.

$h(a)=\frac{1}{a^5}-a^5+\frac{64}{(3-a)^5}-\frac{(3-a)^5}{16}$ 且 $h(1)=0$，

$h(a)$ 图像如下:




$\therefore$ 得证.

而推广到四元及以上时，取 $x_1=2, x_2=x_3=x_4=\frac{2}{3}, x_5=x_6=\ldots x_n=1$，

此时有 $x_1+x_2+\ldots x_n=n$，

且 $\frac{1}{x_1^5}+\frac{1}{x_2^5}+\ldots+\frac{1}{x_n^5}\geq x_1^5+x_2^5+\ldots+x_n^5$，

$\therefore n \ge 4$时，$\frac{1}{x_1^5}+\frac{1}{x_2^5}+...+\frac{1}{x_n^5} \ge x_1^5+x_2^5+...+x_n^5$不成立,

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\times\ln\frac{3}{2}-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]\times\ln\frac{16}{9},$$

下面说明，当$n \ge 3$，且次数$i \ge 6$时，$\sum\frac{1}{x_j^i} \ge \sum x_j^i$均不成立.

取$x_1=\frac{3}{2},x_2=x_3=\frac{3}{4},x_4=...x_n=1$,

$$\therefore \sum\frac{1}{x_j^i}-\sum x_j^i=\left(\frac{2}{3}\right)^i+2\times\left(\frac{4}{3}\right)^i-\left(\frac{3}{2}\right)^i-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^i,$$

令$k(i)=\left(\frac{2}{3}\right)^i+2\times\left(\frac{4}{3}\right)^i-\left(\frac{3}{2}\right)^i-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^i$,

$$k'(i)=\ln\frac{16}{9}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^i+\left(\frac{3}{4}\right)^i\right]-\ln\frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^i+\left(\frac{2}{3}\right)^i\right],$$

令$x=\frac{4}{3},y=\frac{3}{2}$,

$$\therefore k'(i)<\ln\frac{16}{9}\left(x^i+\frac{1}{x^i}-y^i-\frac{1}{y^i}\right)=\ln\frac{3}{2}\left(x^i-y^i\right)\left(1-\frac{1}{x^iy^i}\right)<0,$$

又$i \ge 6 \therefore k(i)_{\max}=k(6)<0$,

$\therefore$当$n \ge 3$，且次数$i \ge 6$时，$\sum\frac{1}{x_j^i} \ge \sum x_j^i$均不成立.

# 四、不等式的推广（形式）

1.已知$a+b\le 2,a,b>0$,则$a^2+b^2\le\dfrac{2}{ab}$.

该不等式可以加强为$ab(a^2+b^2)\le 2$,

$\because a+b\le 2$，即证$a^2+b^2\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$,

去分母的$a(b^3-1)+b(a^3-1)\le 0$,

$\because b\le 2-a\ \therefore ab^3+a^3b-a-b\le-(1-a)^4\le 0$,

$\therefore$得证.

2.已知$a+b+c=3,a,b,c>0$，则$a^2+b^2+c^2\le\dfrac{3}{abc}$.

证：不妨设$a\ge b\ge c$,

先说明该结论为 1.1 的加强形式,

$\because a+b+c=3\ \therefore\dfrac{3}{abc}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}\le\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$,

下面证明该结论：

$$a^2+b^2+c^2\le\frac{3}{abc}\Leftrightarrow abc(a^2+b^2+c^2)\le\frac{(a+b+c)^5}{81}\Leftrightarrow 81abc(a^2+b^2+c^2)\le(a+b+c)^5,$$

整理得$\sum a^5+5\sum_{sym}a^4b+10\sum_{sym}a^3b^2+30\sum_{cyc}a^2b^2c-61\sum_{cyc}a^3bc\ge 0$,

由米尔黑德定理：$\sum a^5\ge\sum a^3bc$,

即证：

$$\sum_{sym}a^4b+2\sum_{sym}a^3b^2+6\sum_{cyc}a^2b^2c-12\sum_{cyc}a^3bc\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow\sum\left[\left(a^4b-a^3bc\right)+\left(a^4c-a^3bc\right)\right]+2\sum\left[\left(a^3b^2-a^3bc\right)+\left(a^3c^2-a^3bc\right)\right]$$

$$+3\sum\left[\left(a^2b^2c-a^3bc\right)+\left(a^2bc^2-a^3bc\right)\right]\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow\sum\left[a^3b(a-c)+a^3c(a-b)\right]+2\sum\left[a^3b(b-c)+a^3c(c-b)\right]$$

$$+3\sum\left[a^2bc(b-a)+a^2bc(c-a)\right]\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow\sum b\left(a^3-c^3\right)\left(a-c\right)+2\sum a^3(b-c)^2-3abc\sum\left(a-b\right)^2\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow\sum\left[abc\left(a-c\right)^2+b\left(a^2+c^2\right)\left(a-c\right)^2\right]+2\sum a^3(b-c)^2-3abc\sum(a-b)^2\ge 0,$$

$$\Leftrightarrow\sum b\left(a^2+c^2\right)(a-c)^2+2\sum a^3(b-c)^2-2abc\sum\left(a-b\right)^2\ge 0,$$

而$\sum b\left(a^2+c^2\right)(a-c)^2-2abc\sum\left(a-b\right)^2=\sum b\left(a-c\right)^4\geq 0$,

$\therefore$得证.

3.已知$a,b,c\geq 0,a+b+c=3$，则$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+1\leq\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}$.

证：设$\{a,b,c\}=\{p,q,r\},p\geq q\geq r$,

原不等式$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq 4$,

由排序不等式可以得到：

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc=a\times ab+b\times bc+c\times ca+abc\leq p\times pq+q\times pr+r\times qr+pqr$$

$$=q(p+r)^2=q(3-q)^2=\frac{1}{2}\times 2q\times(3-q)\times(3-q)\leq\frac{1}{2}(\frac{6}{3})^3=4$$

$\therefore$得证.

4.由4.3的证明可以得到一个结论：

已知$a,b,c>0,a^2b+b^2c+c^2a+abc=4$，则$a+b+c\geq 3$.

5.已知$a+b+c=k+1,a,b,c>0,k\in N^+$，则$\frac{a^k}{c}+\frac{b^k}{a}+\frac{c^k}{b}\leq\frac{k^k}{abc}$.

证：设$\{a,b,c\}=\{p,q,r\},p\geq q\geq r$,

原不等式$\Leftrightarrow a^kb+b^kc+c^ka\leq k^k$,

$$a^kb+b^kc+c^ka\leq p^kq+pq^{k-1}r+r^kq\leq q\left(p+r\right)^k=q(k+1-q)^k$$

$$\leq\frac{1}{k}\times kq\times(k+1-q)^k\leq\frac{1}{k}\times\left[\frac{(k+1)k}{k+1}\right]^{k+1}\leq k^k$$

当且仅当$p=k,q=1,r=0$时取到,

$\therefore$得证.

6.已知$a+b+c+d=4,a,b,c,d>0$，则$\frac{a}{d}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}\leq\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}$.

证：设$\{a,b,c,d\}=\{p,q,r,s\},p\geq q\geq r\geq s$,

原不等式$\Leftrightarrow a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\leq 4$,

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab=(pq+sr)(pr+qs)$$

$$\leq\frac{(pq+sr+pr+qs)^2}{4}=\frac{(p+s)^2(q+r)^2}{4}\leq\frac{(p+q+r+s)^4}{64}\leq 4$$

$\therefore$ 得证.

7.已知 $a,b,c\geq 0,a^2+b^2+c^2=3$，则 $\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}\leq\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}$ .

证：设 $\{a,b,c\}=\{p,q,r\}, p\geq q\geq r$ ,

原不等式 $\Leftrightarrow a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\leq 3$ ,

$$\sum a^3b^2\leq p\left(p^2q^2\right)+q\left(p^2r^2\right)+r\left(p^2q^2\right)=q\left[p^2(pq+\frac{r^2}{2})+r^2(qr+\frac{p^2}{2})\right]$$

$$\leq q\left(p^2+r^2\right)\times\frac{p^2+q^2+r^2}{2}\leq\frac{3}{2}q^2(3-q^2)\leq 3$$

$\therefore$ 得证.

## 五、不等式的推广（参数）

1. 已知 $a+b=2,a,b>0,n\geq p\geq 0,m\geq q\geq 0$，则 $\frac{m}{a^2}+\frac{n}{b^2}\geq pa^2+qb^2$.

证：由 $a+b=2,a,b>0$ 得 $ab\leq 1$,

$$\therefore\frac{m}{a^2}+\frac{n}{b^2}-pa^2-qb^2=\frac{na^2+mb^2-a^2b^2\left(pa^2+qb^2\right)}{a^2b^2}\geq\frac{na^2+mb^2-\left(pa^2+qb^2\right)}{a^2b^2}$$

$$=\frac{(n-p)a^2+\left(m-q\right)b^2}{a^2b^2}\geq 0$$

2. 已知 $p\in N^+, p\leq 9, a+pb=p+1$，则 $\frac{1}{a^2}+\frac{p^3}{b^2}\geq a^2+\frac{b^2}{p}$ .

证：$\because a+b+b+....b=p+1$（ $p$ 个 $b$ ），

$\therefore$ 显然成立.

## 六、不等式的猜想

已知$a_1+a_2+...a_m=p_1+p_2+...p_m$且$\frac{p_1^{n+1}}{a_1^n}+\frac{p_2^{n+1}}{a_2^n}+...\frac{p_m^{n+1}}{a_m^n}\geq\frac{a_1^n}{p_1^{n-1}}+\frac{a_2^n}{p_2^{n-1}}+...\frac{a_m^n}{p_m^{n-1}}$

$m$和$n$应满足什么关系？

## 七、参考文献


[1]高等数学第六版，同济大学数学系编，高等教育出版社,2012.6

[2]不等式研究第二辑，杨学枝编，哈尔滨工业大学出版社,2012.1.

[3]平均值不等式与柯西不等式（第二版），李胜宏、边红平编，华东师大出版社,2012.2

[4]数学奥林匹克不等式证明方法与技巧上、下，蔡玉书编著，哈尔滨工程大学出版社,2011.5.